2. DAĞILIM FONKSİYONU TEKNİĞİ

Sürekli $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu f$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verilmiş olsun. Y=u$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dönüşüm değişkeninin dağılımını bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

i) Y =u(X) rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun tanımından

$$G(y) = P(Y \le y) = P(u(X) \le y)$$
$$= P(X \le u^{-1}(y))$$
$$= F_X\left(u^{-1}(y)\right)$$

olarak bulunur.

ii) a) Y sürekli bir rastgele değişken ise türev yardımıyla Y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{dG(y)}{dy} & , \ G(y)'nin\ türevlenebildiği\ yerlerde \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases}$$

b) Y kesikli bir rastgele değişken ise olasılık fonksiyonu y$\in D_y$ için

$$P(Y=y) = G_y(y^+) - G_y(y^-)$$

olacaktır.

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & , diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olsun. Y =- θlnX rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Dağılım fonksiyonu tekniğini kullanarak bulunuz?

Çözüm: Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tanımından

$G(y) = P(Y \le y) = P(-\theta \ln X \le y)$

$= P(-\ln X \leq \frac{y}{\theta})$

$= P (\ln X > -\frac{y}{\theta})$

$= P (X > e^{-\frac{y}{\theta}})$

yazılır. Yukarıdaki olasılığın hesabı yapıldığında Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$G (y) = \int_{e^{-\frac{y}{\theta}}}^{1} f(x)dx = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$

şeklinde elde edilir. Buradan Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y)=\begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} & , \quad 0 < y < \infty \\ 0 \ , \ dd \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek : X rastgele değişkeni [-1,1] aralığı üzerinde Düzgün (Uniform) olarak dağılsın.

a) Y = $|X|$
b) Y = X^2

rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu Dağılım fonksiyonu tekniği ile bulunuz.

Çözüm: X rastgele değişkeni [-1,1] aralığı üzerinde Düzgün (Uniform) dağılıma sahip ise X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, -1 < x < 1 \\ 0, \qquad dd \end{cases}$$

şeklindedir.

a) Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun tanımından Y' nin dağılım fonksiyonu

G(y) = P(Y ≤ y) = P ($|X|$ ≤ y)
= P (-y ≤ X ≤ y)
= $\int_{-y}^{y} f(x)\, dx$

$$G(y) = y \quad , \; 0 < y < 1$$

şeklinde bulunur. Dağılım fonksiyonunun türevinin alınmasıyla Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \begin{cases} 1 & , \; 0 < y < 1 \\ 0 & , \; d.d \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

b) Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun tanımından Y' nin dağılım fonksiyonu

$$G(y) = P(Y{=}y) = P\,(X^2 \leq y)$$

$$= P\,(|X| \leq \sqrt{y})$$

$$= P\,(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \sqrt{y}$$

şeklinde bulunur. Dağılım fonksiyonunun türevinin alınmasıyla Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g\,(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \;, 0 < y < 1 \\ \quad 0, \qquad dd \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.